PrivateTeacher
Cours Privés de Science

Test d'hypothèse et valeur-p

Mise en scène

Imaginons le scénario suivant : Il fait beau, c'est l'été et on décide d'aller se baigner.

Comme il fait chaud, on s'imagine que la température de l'eau est agréable.

On prend donc son maillot de bain et on se dirige en direction de la plage.

Arrivé sur place, on trempe le pied pour vérifier la température de l'eau.

On constate que la température est agréable
On décide donc d'aller nager.

Prendre une décision

Derrière cette décision se cache en réalité une succession d'étapes tout à fait banales qui nous a permis de prendre une décision.

Nous venons en effet de réaliser tout naturellement ce que les statisticiens appellent un test d'hypothèse

Bien que la mise en scène puisse être différente, la logique qui nous a permis de prendre notre décision elle, est toujours la même.

C'est de cette logique dont il est question dans un test d'hypothèse et c'est pourquoi nous allons l'étudier dès à présent.

Une suite d'étapes logiques

Nous allons formaliser (mettre en forme)
la séquence d'étapes qui nous
à permis de prendre une décision.

Voici le détail de la démarche :

1) Identifier le scénario
je souhaite aller me baigner

2) Formuler une hypothèse
La température de l'eau est agréable

3) Choisir une mesure
mesurer la température de l'eau

4) Se donner une valeur limite
20°

5) Faire une observation
Je vais sur place
et prend la mesure

6) Prendre une décision
En deca de 20°, il fait trop froid
Au dela de 20°, je vais me baigner

Chaque étape dans les détails

1) Identifier le scénario

Il convient tout d'abord de reconnaître la mise en scène. Cela nous permettra de choisir une mesure accessible par l'expérience.

2) Formuler une hypothèse

On cherche à comprendre quelque chose. Notre point de départ est notre hypothèse de travail. Elle représente ce que l'on souhaite vérifier.

3) Choisir une mesure

Pour pouvoir vérifier une hypothèse il faut se donner un moyen de l'évaluer quantitativement. Dans notre exemple, il s'agit d'une mesure direct, la température. Nous verrons qu'il peut s'agire d'une valeur calculée, dans ce cas nous l'appellerons une statistique de test.

4) Se donner une valeur limite

Le but de notre mesure est de nous permettre de prendre une décision.
La valeur limite est une valeur choisie de façon libre et arbitraire entre une hypothèse (H_0) ou une autre (H_1)

A ce stade il est utile de relever un point important au sujet de la valeur limite.

Dans notre exemple, nous avons choisit 20°

Or, une eau à 20° au pôle nord ne signifie pas la même chose qu'une eau à 20° au Brésil.

Je me baignerai facilement dans une eau à 20° au pôle Nord, alors que cette même température me semblera froide au Brésil.

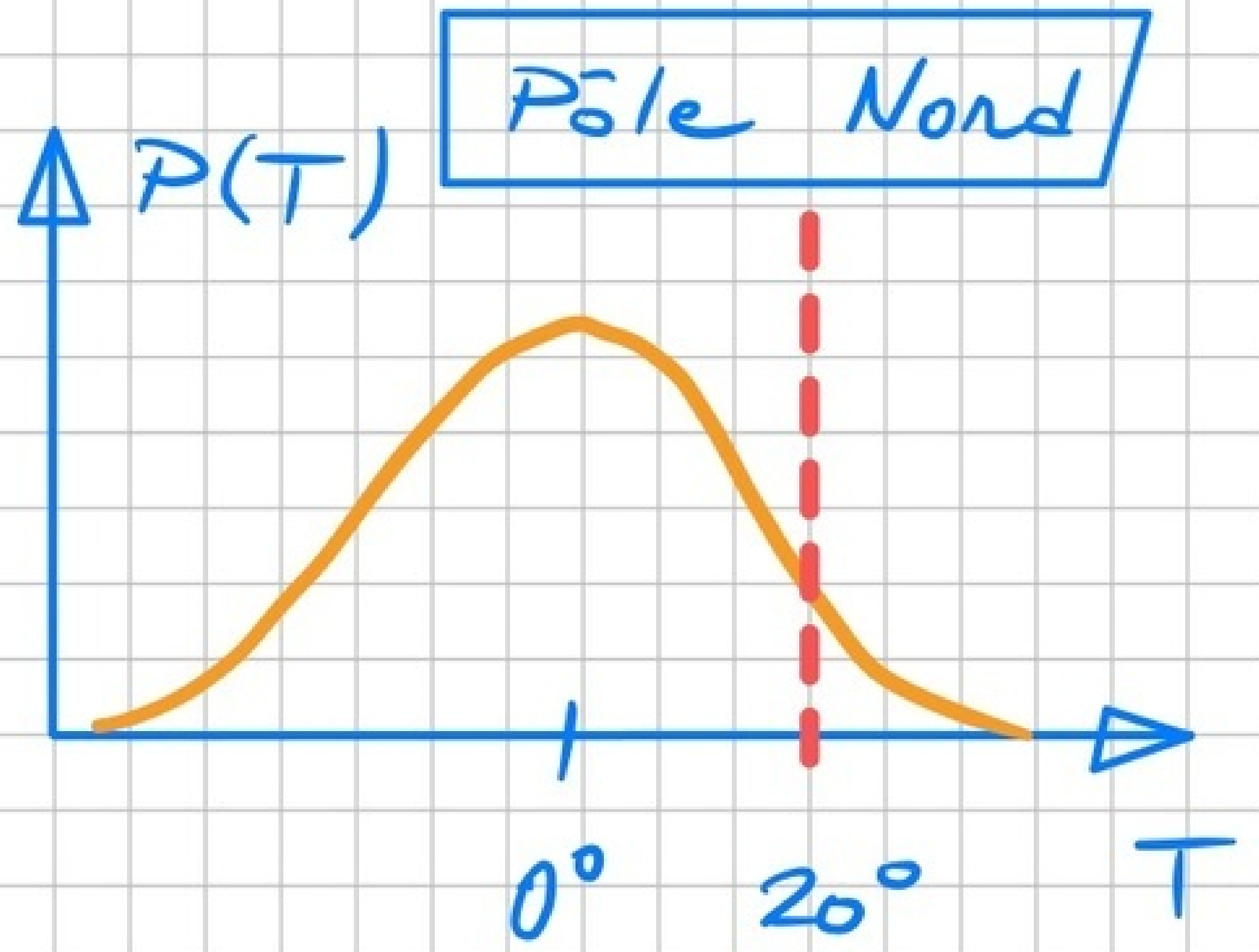
Ma décision ne sera donc pas la même suivant le contexte.

Pour situer le contexte d'une valeur mesurée, on utilise la distribution de probabilité de toutes les valeurs possibles.

La valeur limite dans son contexte

Les températures ne se distribuent pas pareillement d'une région à l'autre.

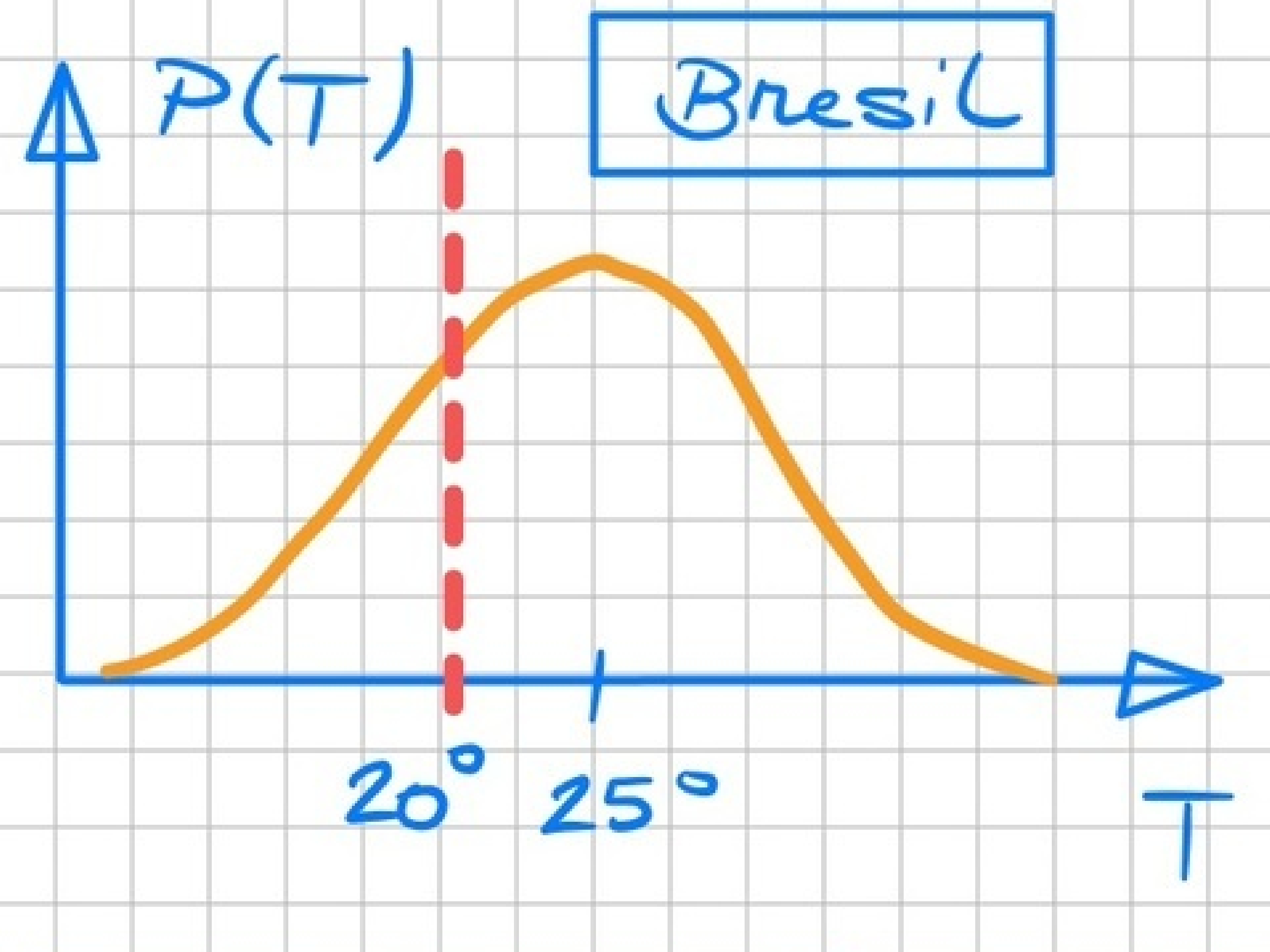
Au pôle nord, on aura probablement des températures qui se distribuent autours de 0°



Dans ce contexte

20° est très clairement une température agréable.

Au Brésil par contre, la température moyenne est bien plus élevée.



Dans ce contexte

20° est probablement considéré comme une température "froide"

La même température n'a pas la même signification selon le context

5) Faire une observation

Maintenant que l'on situe le contexte et que l'on s'est donné une valeur limite, il convient d'aller sur le terrain afin de mesurer ce qui se passe vraiment.

6) Prendre une décision

Si ma valeur observée sur le terrain (on l'appel parfois valeur empirique) est en deçà de la valeur limite que je me suis fixé (de manière libre) alors je prendrais une décision (H_0) Si la valeur observée sur le terrain se situe au delà de ma valeur limite, alors je prendrais une autre décision (H_1)

Un exemple chiffré

Nous allons voir à présent comment la distribution de probabilité de la mesure choisie permet de fixer un seuil et prendre une décision.

Une famille habitant dans un petit village de montagne souhaite mettre au monde autant de garcons que possible. Une sorcière propose alors une plante magique à la maman pour lui permettre de mettre au monde des enfants de sex masculin. La femme prend rigoureusement cette médecine et met au monde 15 enfants. Parmis ces chers enfants, 10 sont des garçons. La plante magique a t elle eu un effet ?

Cet exercice est intéressant car la réponse semble évidente.

On s'attend en effet à avoir autant de garçons que de filles parmi les 15 enfants.

Or dans notre cas, on observe 10 garcons. C'est bien plus que la moitié, on en déduit immédiatement que la plante magique à bel et bien eu l'effet désiré.

Cependant, qui n'a jamais rencontré une famille dont les trois enfants sont tous des garçons ?

C'est une chose tout à fait normale. Ce genre d'évènement se produit par hasard sans qu'il soit question d'un régime.

La question qui se pose en réalité est donc la suivante :

10 garçons parmi 15 enfants représentent il une situation significativement différente du hasard ?

Si la réponse est "Oui" c'est que la plante magique est efficace. Sinon, cela signifie qu'elle ne sert à rien.

Pour répondre à cette question, on reprend la séquence d'étapes que nous avons décrite précédemment.

Une séquence d'étapes toujours identique

1) Identifier le scénario

je souhaite mettre au monde autant de garçons que possible grâce à une plante magique

2) Formuler une hypothèse

La plante magique est efficace

3) Choisir une mesure

Le nombre de garçons qui ont vu le jour au sein de cette famille.

4) Se donner une valeur limite

Une valeur limite nous l'avons vu, doit prendre place au sein d'un context.

Le context est donné par la distribution de probabilité des valeurs de notre mesure

Etudions donc comment se distribue le nombre de garçons au sein d'une famille de 15 enfants.

Valeur limite et seuil alpha

Pour parler de valeur limite, il faut déjà pouvoir parler de valeur normale.

En terme de probabilité, normale signifie fréquent. Un évènement normal est un évènement qui se produit souvent, on pourrait dire aussi banal

Une fois que l'on sait ce qui est normale on peut identifier ce qui est spéciale, et placer une limite entre les deux.

Cette valeur valeur limite on la défini en terme de probabilité critique, aussi appellée seuil α comme nous allons le voir.

Pour l'instant, il s'agit simplement de reconnaitre que la fréquence avec laquelle un évènement se produit fera de lui qu'il sera considéré normale ou pas.

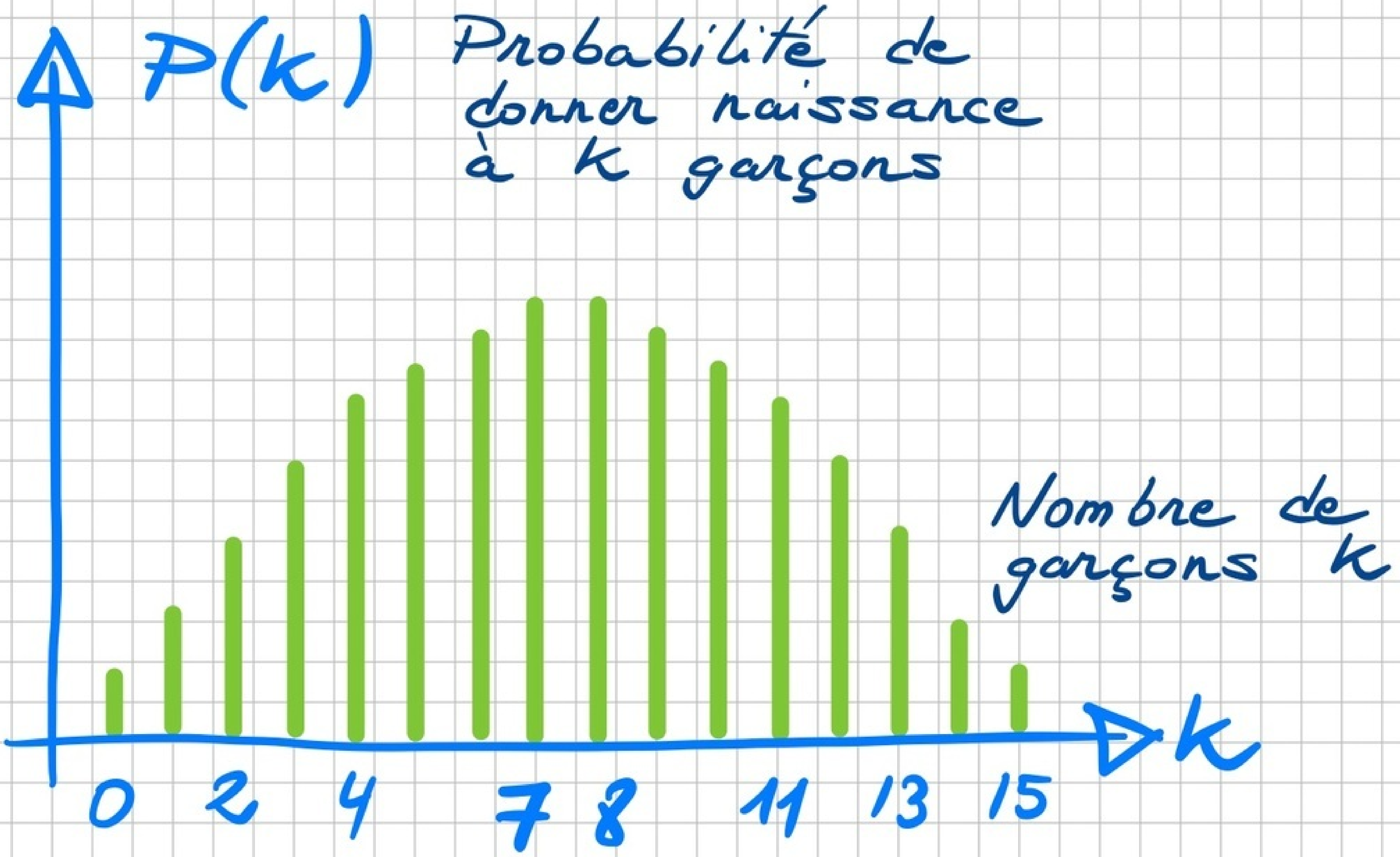
A ce stade, il convient donc de trouver un moyen de connaître avec quelles fréquence (selon quelle probabilité) se rencontre un nombre déterminé de garçons

Distribution de probabilité

La distribution de probabilité du nombre de garçons, tout comme celle du nombre de fille, suit une loi binômiale

Une loi binômiale apparaît lorsque le processus qui nous intéresse est une succession d'évènement binaires : fille - garçon, fille - garçon, etc ... (cf annexe loi binômiale pour plus de détails)

On a la situation suivante :



Ce graphique nous montre avec quelle probabilité se rencontre un nombre déterminé de garçon (noté k) parmi 11 enfants.

Grâce à ce graphique, on peut voir tout de suite que la situation la plus probable ($P(k)$ le plus élevé) est celle ou 7 ou 8 garçons ont vu le jour.

On voit également que la situation ou ce sont 6 ou 9 garçons qui sont né est tout aussi fréquent.

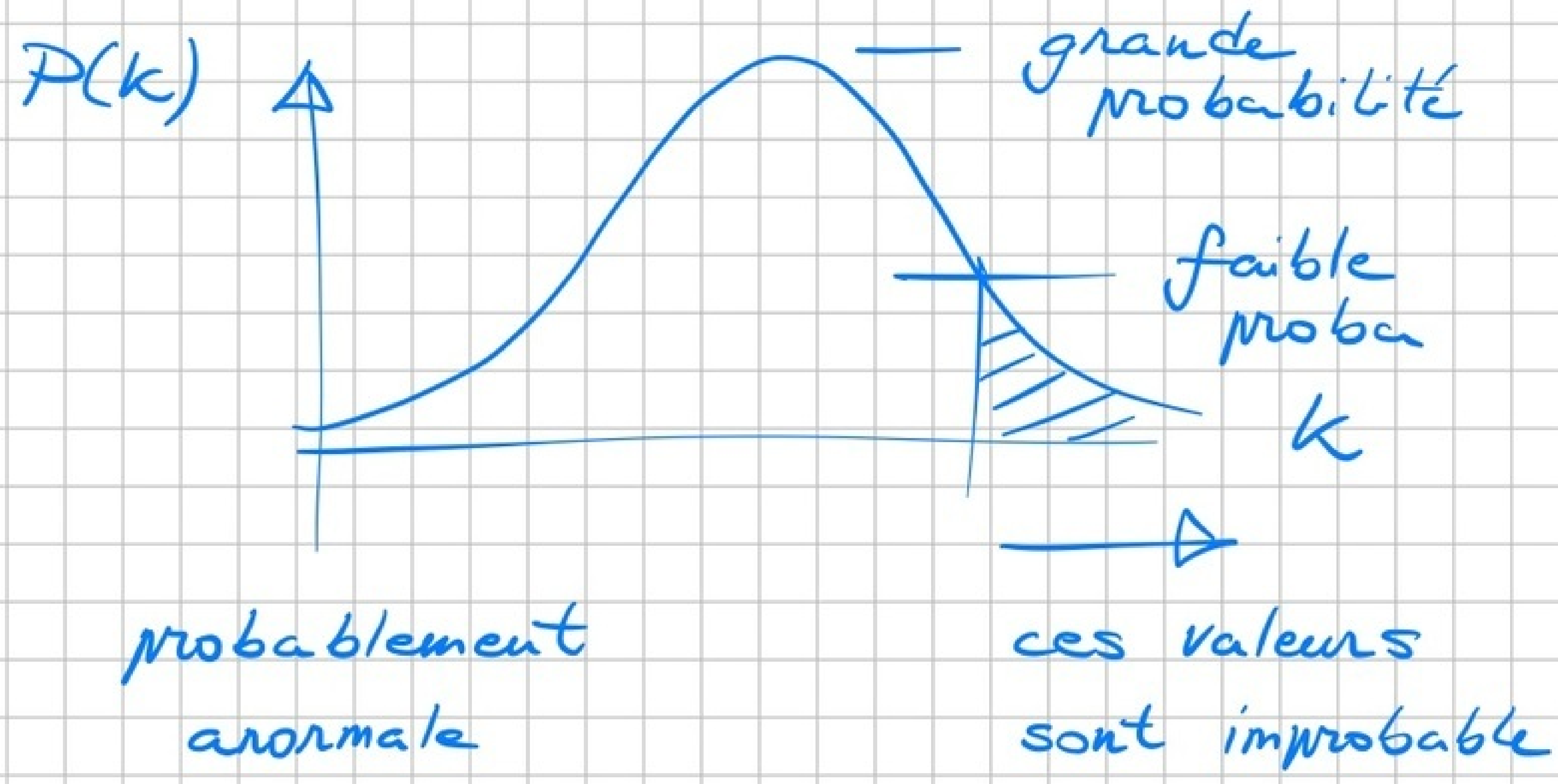
Dans ce context, il est maintenant possible de vérifier si le traitement proposé par la sorcière est efficace ou pas.

On procède au raisonnement suivant :
si le nombre de garçons qui ont vu le jour parmi 11 enfants est un nombre banal, c'est probablement que le traitement ne sert à rien.

Si par contre le nombre de garçons est un nombre que l'on observe rarement, qui sort de l'ordinaire, autrement dit : peu fréquent alors il y à des chances pour que le traitement de la sorcière aie été efficace.

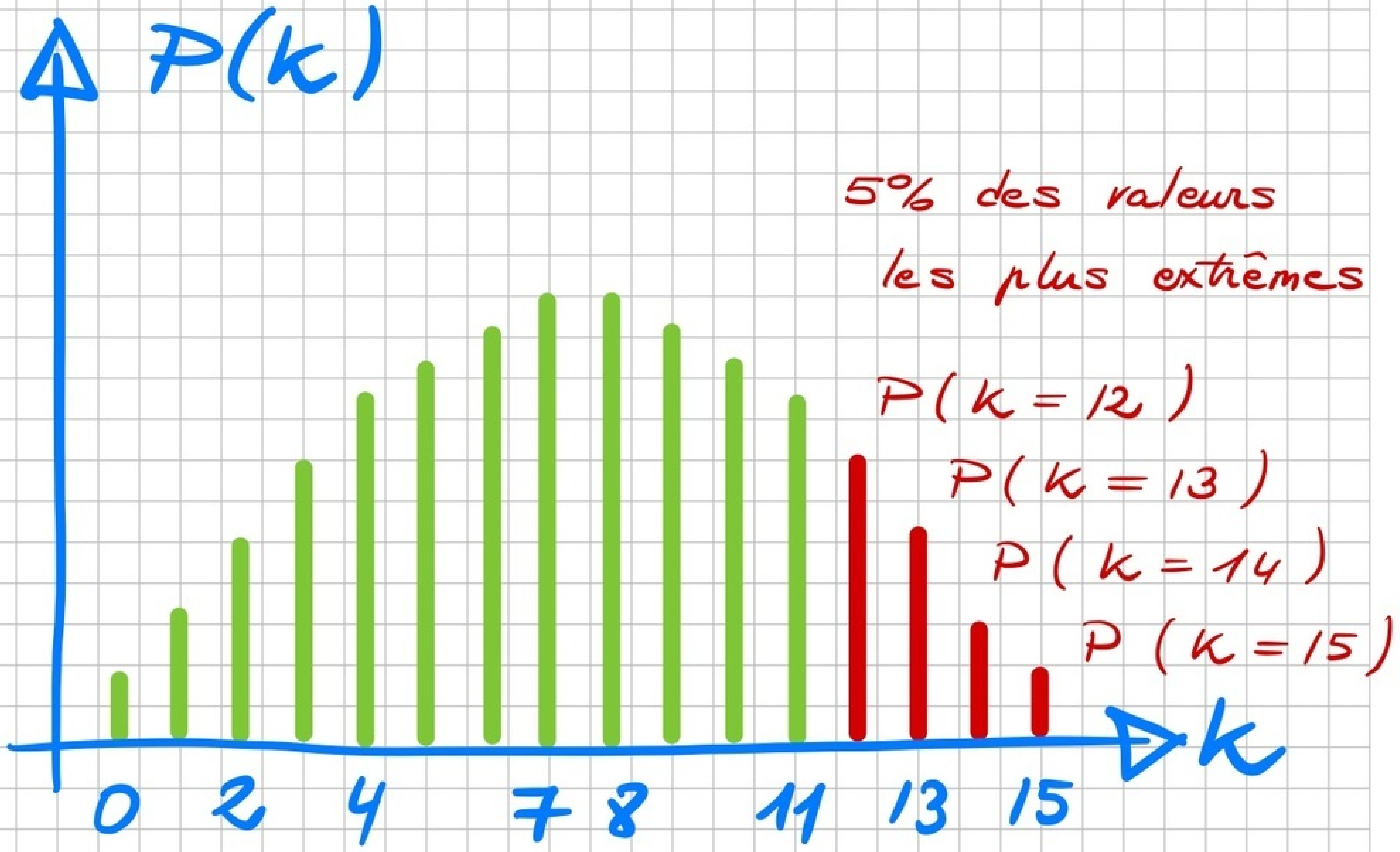
Libre à nous ensuite de définir ce que l'on entend par " peu fréquent "

On choisi habituellemment les 5 derniers pourcent de la distribution. Ils contiennent en effet les valeurs les plus improbables de la distribution autrement dit les valeurs pour lesquelles la situation est considérée hors du commun.



Ces 5% sont notre seuil α

Nous allons voir a présent comment le calculer.



la probabilité d'obtenir 15 garçons $P(k=15)$ est donnée par la loi binômial :

$$P(k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}$$

$$P(15) = C_{15}^{15} \, 0.5^{15} \, (1-0.5)^{15-15}$$

$$= \frac{15!}{15!\,0!} \, 0.5^{15} \cdot 0.5^{0}$$

$$= 1 \cdot 0.5^{15} \cdot 1$$

$$= 3.05 \cdot 10^{-5}$$

On voit qu'il s'agit d'un évènement extrêmement rare car cette probabilité est extrêmement faible.

de même pour les autres valeur extrême, on a les probabilités suivantes :

$$P(k=14) = C_{15}^{14} \cdot 0.5^{14} (1-0.5)^{15-14}$$

$$= \frac{15!}{14!\,1!}\, 0.5^{14} \cdot 0.5^{1}$$

$$= 15 \cdot 0.5^{14} \cdot 0.5$$

$$= 15 \cdot 0.5^{15}$$

$$\underline{= 4.6 \cdot 10^{-4}}$$

$$P(k=13) = C_{15}^{13}\, 0.5^{13} (1-0.5)^{15-13}$$

$$= \frac{15!}{13!\,2!}\, 0.5^{13}\, 0.5^{2}$$

$$= \frac{15 \cdot 14}{2} \cdot 0.5^{15}$$

$$= \underline{3.2 \cdot 10^{-3}}$$

$$P(k=12) = C_{15}^{12}\, 0.5^{12} (1-0.5)^{15-12}$$

$$= \frac{15!}{12!\,3!}\, 0.5^{12}\, 0.5^{3}$$

$$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} \cdot 0.5^{15}$$

$$\underline{= 1.39 \cdot 10^{-2}}$$

Au total, chacune de ces probabilités s'additionne pour donner la somme de toutes les probabilités des évènements les plus rares $P_{Tot}(Rare)$

$$P_{Tot}(Rare) = P(k=15) + P(k=14) + P(k=13) + P(k=12) + \dots$$

On continue d'additionner ainsi les probabilités des évènements les plus rare jusqu'à obtenir la valeur de notre seuil α :

$$P_{Tot}(Rare) = 3.05 \cdot 10^{-5} + 4.6 \cdot 10^{-4} + 3.2 \cdot 10^{-3} + 1.39 \cdot 10^{-2} +$$

$$= 0.0176 = 1.7\ \%$$

Si on additionne encore la probabilité de mettre au monde 11 garçons $P(k=11) = 4.1 \cdot 10^{-2}$, on dépasserait la valeur α du seuil critique que l'on s'est fixé.

La valeur limite associée au seuil α que l'on s'est fixé est donc :

$$k = 11 \text{ garçons}$$

5) Faire une observation

Dès lors que l'on s'est fixé une valeur limite pour faire la différence entre ce qui est normale ou pas, il s'agit de la comparer avec la valeur observée sur le terrain. On appel cette valeur la valeur empirique. Dans notre cas, elle vaut 10 garçons.

6) Prendre une décision

Cette valeur on le voit se situe en deçà de notre valeur limite. Dans ce context, la valeur $k = 10$ représente donc une valeur banal. on rejette donc l'hypothèse selon laquelle la plante magique donnée par la sorcière serait efficace.