PrivateTeacher

Cours Privés de Science

Régression Linéaire

2024.09.08

V 1.5

Introduction

Les droites de regression linéaires sont des modèles dont on se sert pour représenter la réalité.

En tant que modèle, une droite possède plusieurs avantages par rapport aux observations. Une droite en effet, permet de :

1) Résumer une série d'observations
2) Expliquer les observations.
3) Prédire les prochaines observations.

Un modèle cependant n'est pas la réalité mais seulement une approximation de celle-ci. Pour cette raison, une erreur est toujours associée aux droites de régression, comme nous allons le voir dans un instant.

La place du marché

Un marchand de pomme vend le fruit de sa récolte sur la place du marché.

Voici les prix affiché sur son étalage :

0.5 kilo de pomme coûte 1.5 CHF

1 kilo de pomme coûte 3 CHF

10 kilo de pomme coûte 30 CHF

On l'a compris, pour savoir quel est le prix des pommes, il suffit de multiplier le poids des pommes par 3.

Si x représente le poids des pommes, et y le prix, alors on peut écrire la relation sous forme d'une équation :

$$\boxed{y = 3x}$$

On dit alors que le prix des pommes est proportionnel au poids, car le rapport entre le prix et le poids est toujours le même quel que soit le nombre de pomme : $\frac{30}{10} = 3$ $\frac{9}{3} = 3$

On appel 3 le facteur de proportionnalité

En mathématiques, deux valeurs sont dites proportionnelles si leur rapport reste identique, même quand ces valeurs changent.

si	1	kg	coûte	3 CHF
alors	2	kg	coûtent	$3 \cdot 2 = 6$
et	4	kg	coûtent	$3 \cdot 4 = 12$
et	10	kg	coûtent	$3 \cdot 10 = 30$

$$3x = y$$

Cette relation simple permet de <u>résumer</u> toute la liste des prix.

Elle permet également d'<u>expliquer</u> le prix : si je paie cher, c'est par-ce que j'ai pris beaucoup de pommes.

Cette relation enfin permet de <u>prédire</u> un prix qui ne serait pas affiché par le marchand : si je choisit 3.45 kilos de pommes, alors je paie $3.45 \cdot 3 = 10.35$ CHF

Représentation graphique

La droite est une manière visuelle de représenter une relation de proportionnalité.

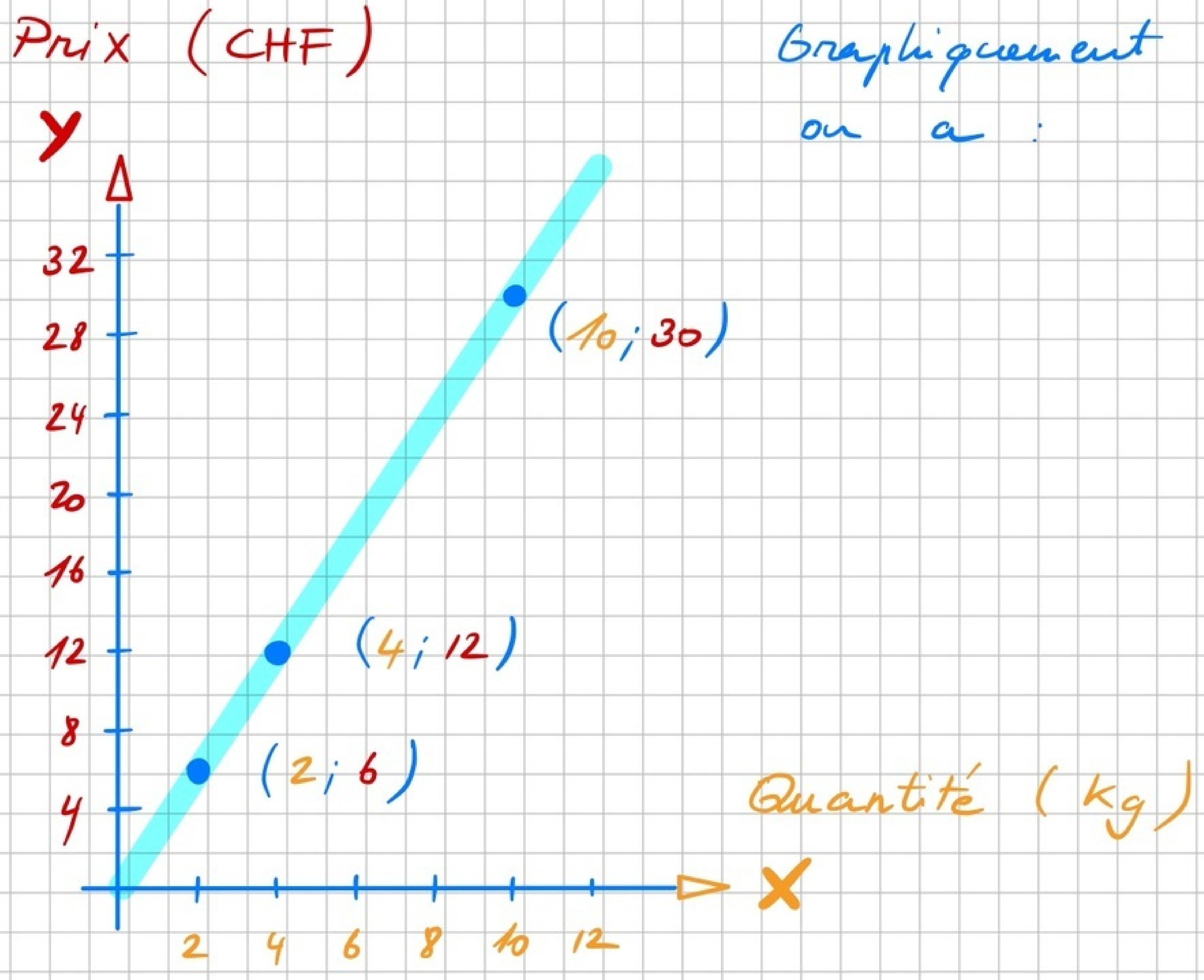
On la construit à l'aide d'un tableau :

x	y
2	6
4	12
10	30

Il existe une relation entre la quantité de pommes x et le prix des pommes y

Mathématiquement elle prend la forme $y = 3x$

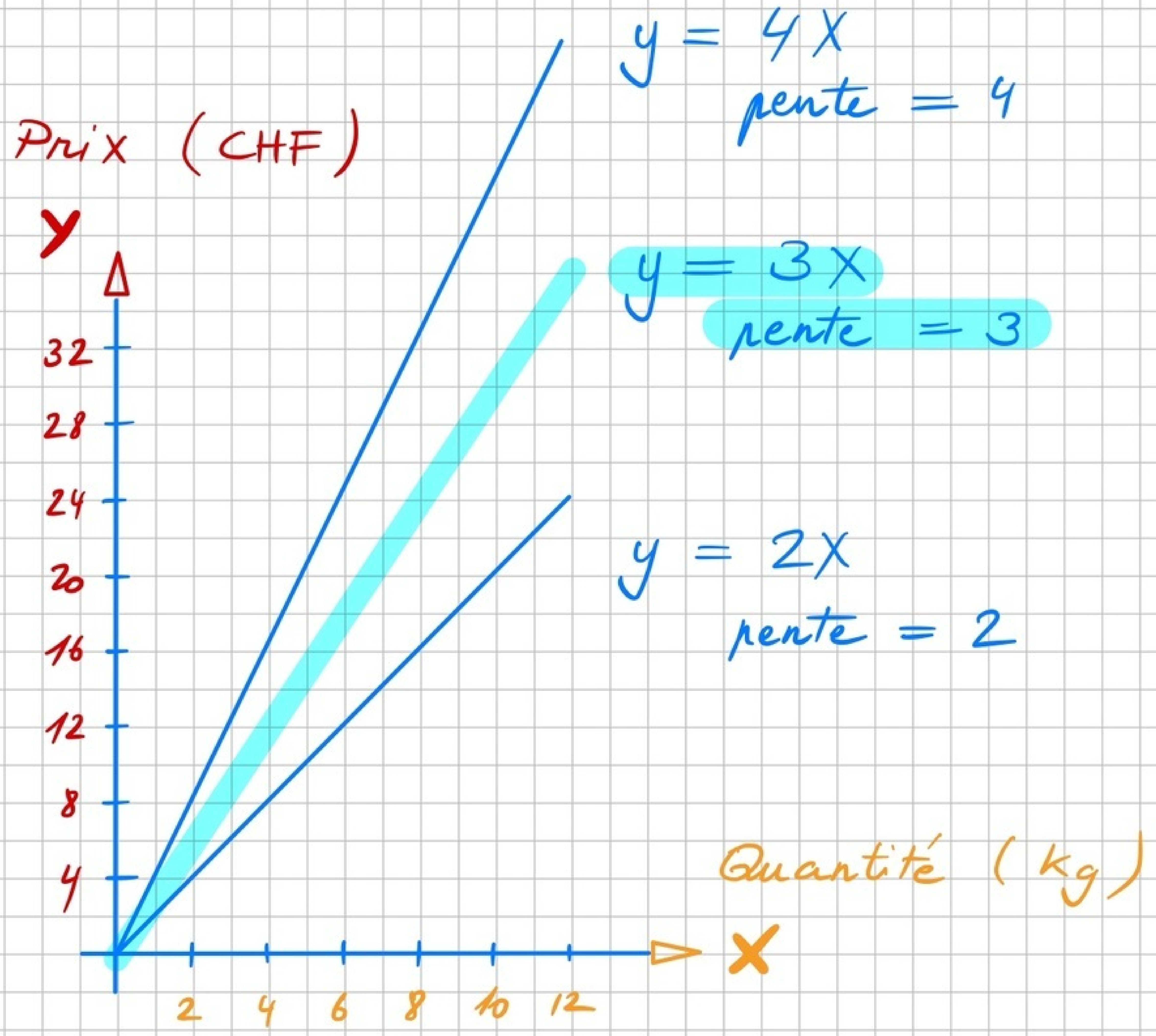
Graphiquement on a :



La pente

Si le prix du kilo de pomme avait été plus élevé, le prix des pomme augmenterait plus rapidement et la pente de la droite serai plus élevée

À l'inverse si le prix avait été plus bas, la pente aurait été plus faible



On peut lire la pente directement sur l'équation.

Elle est le facteur qui multiplie "x"

La pente représente le coefficient de proportionnalité entre le prix et la quantité.

À l'inverse, on peut lire la pente directement sur le graphique voici comment s'y prendre :

Relation de proportionnalité

En mathématiques, deux valeurs sont dites proportionnelles si leur rapport reste identique, même quand ces valeurs changent.

Prenons par exemple le changement de température avec l'altitude.

Il fait toujours plus froid lorsque l'on monte en altitude.

À chaque fois que l'on s'élève de 1 km (dénivellation de 1 km) la température diminue de 6 °C en moyenne.

Si l'on monte de 4 km, la température chute de 24 °C.

Lorsqu'on écrit le rapport entre la température et la dénivellation, on a :

$$\frac{6}{1} = 6 \qquad \frac{24}{4} = 6$$

Le rapport entre la température et la dénivellation est toujours le même

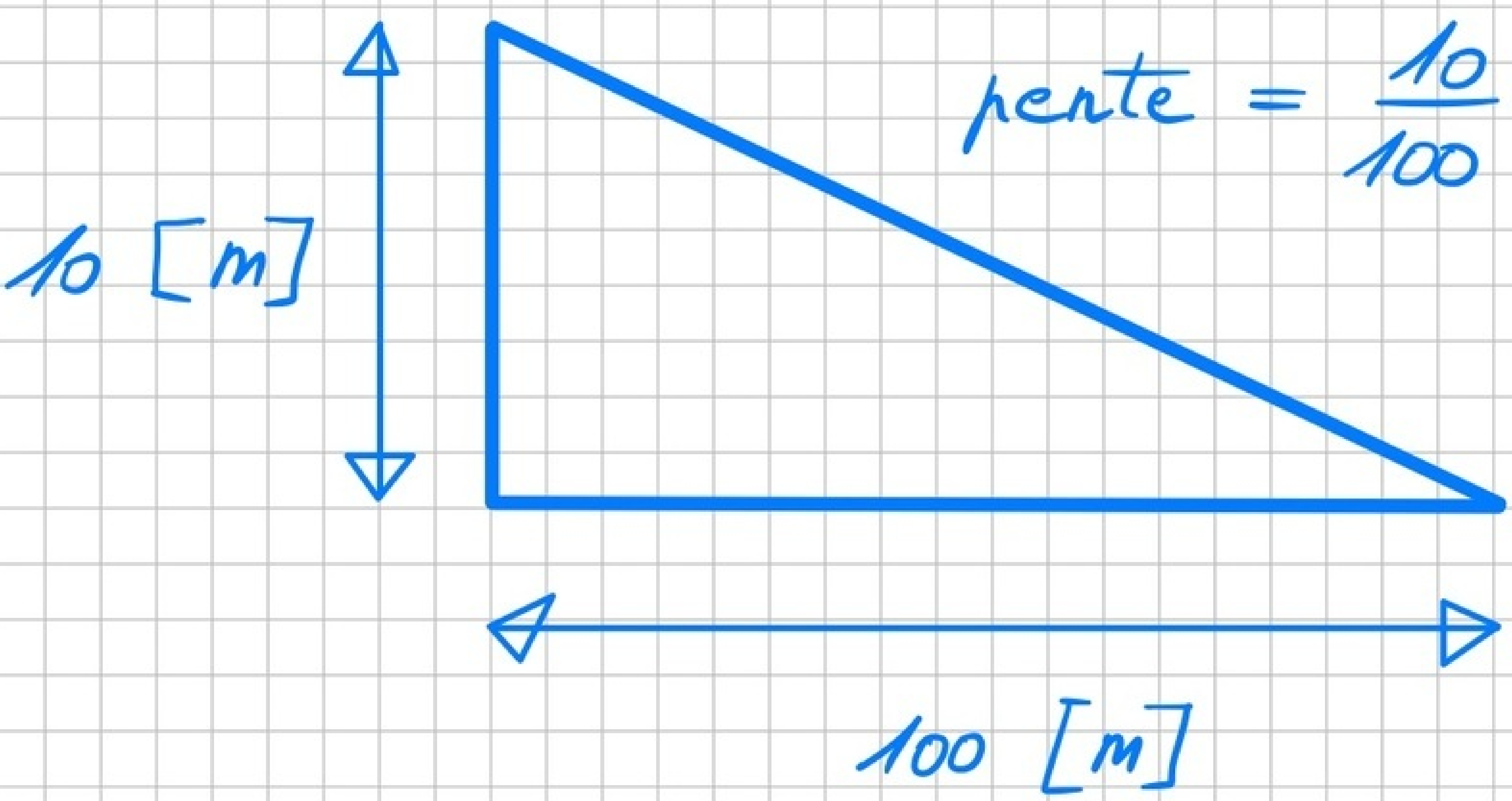
On dit alors que la température est proportionnelle à la dénivellation

Calcul de la pente

La pente indiquée sur ce panneau est de 10 %.

Cela signifie que pour 100 [m] parcouru <u>horizontallement</u>, la voiture sera descendue de 10 [m] <u>verticalement</u>.

Une pente est donc le rapport entre une distance verticale et une distance horizontale.



$$\text{pente} = \frac{10}{100} = 10\,\%$$

Ordonnée à l'origine

Imaginons maintenant que l'entrée à la place du marché soit payante.

Avant de pouvoir acheter des pommes au prix indiqué, il faut s'acquitter d'un montant de 8 CHF.

Le prix des pommes "y" est toujours proportionnel au nombre de pommes ($y = 3x$) mais cette fois, le montant de l'entrée s'y ajoute systematiquement si bien que le prix final devient :

$$y = 3x + 8$$

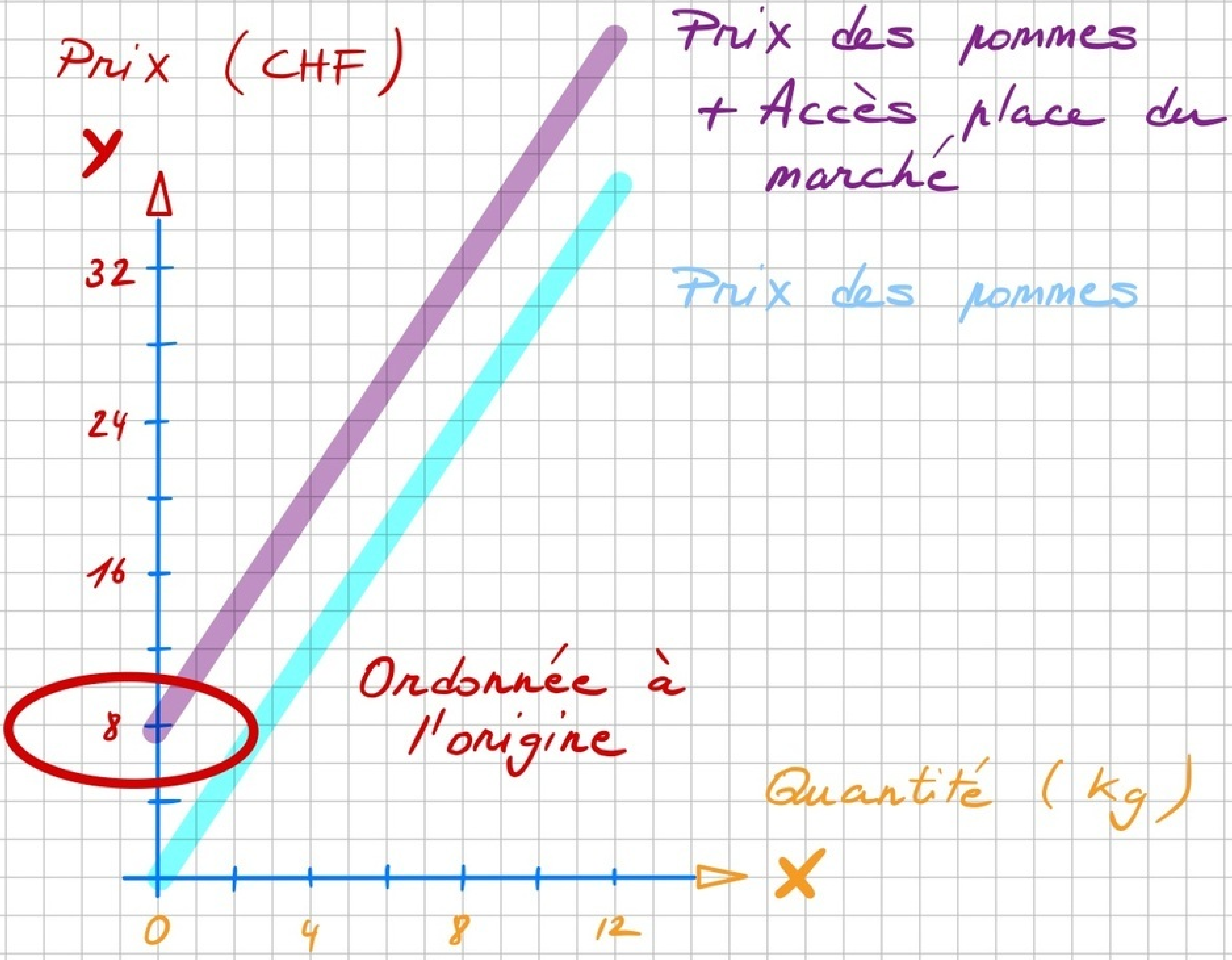
2 kg	coûtent	$3 \cdot 2 + 8 = 14$
4 kg	coûtent	$3 \cdot 4 + 8 = 20$
10 kg	coûtent	$3 \cdot 10 + 8 = 38$

$$3x + 8 = y$$

Pour dessiner la relation entre le prix des pommes et le nombre de pommes, on refait notre tableau

x	y
2	14
4	20
10	38

Graphiquement, cela se traduit par une droite parallèle au dessus de la précédente :



On le voit, quelque soit le nombre de pommes, le prix final est toujours supérieur de 8 CHF.

Sur le graphique en $x = 0$ (0 pomme) on lit que le prix est de 8 CHF

Cette valeur de y en $x = 0$ se nomme <u>l'ordonnée à l'origine</u>

Equation de la droite

Les droites nous l'avons vu, sont déterminées par deux valeurs : sa pente et son ordonnée à l'origine.

Les droites <u>en générale</u> possède toutes une pente que l'on note "a" et une ordonnée à l'origine que l'on note "b"

$$\boxed{y = ax + b}$$

Il s'agit là de la <u>forme générale</u> de l'équation de la droite.

Cette forme désigne la famille de toutes les droites. L'équation :

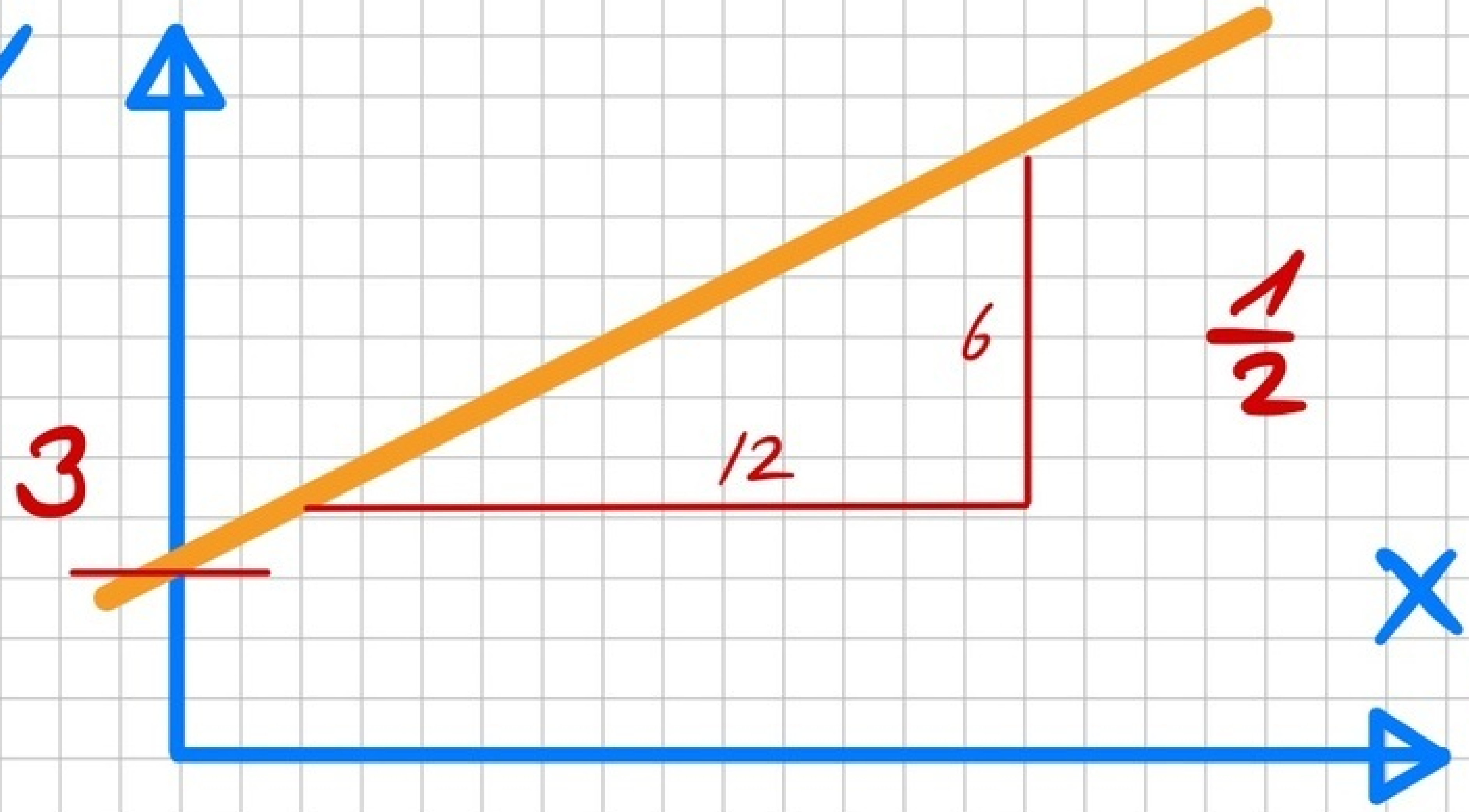
$$y = 4x + 2$$

désigne <u>une droite en particulier.</u>

On peut choisir "a" et "b" librement et obtenir n'importe quelle droite en particulier.

Pour cette raison, "a" et "b" se nomment <u>les paramètres de la droite</u>.

La droite en bref



On peut dessiner le graphique à partire de l'équation.

On peut lire l'équation sur le graphique

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 3}$$

Régression linéaire

Lorsque l'on passe de l'équation générale de la droite $y = ax + b$ à une équation particulière p. exple $y = 4X + 7$, dans le but d'ajuster la droite à des observations on effectue ce qu'on appel une régression linéaire

La régression linéaire est un processus qui permet de trouver l'équation d'une droite particulière : la droite qui se superpose à nos observations.

De telles équations représentent donc un modèle de la réalité dont on peut dès lors se servir pour faire des prédictions.

Dans une certaine mesure on peut substituer le modèle à la réalité mais il ne faut jamais oublier que ceux-ci ne sont que des approximations

Nous avons vu quels étaient les avantages d'utiliser une droite pour représenter une relation de proportionnalité.

Voyons à présent comment trouver une telle relation au sein de nos données.

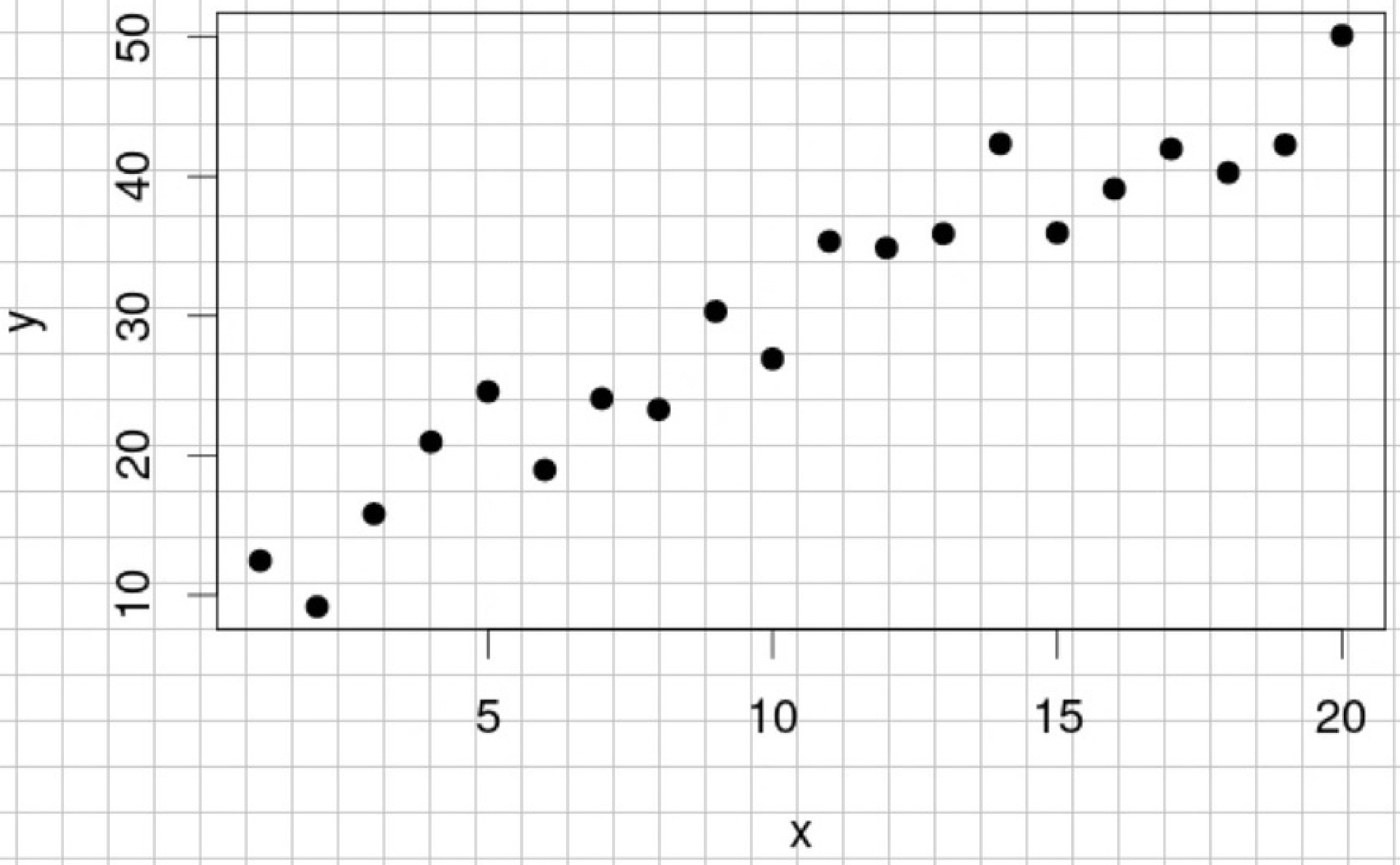
Nos observations sont réunies dans le tableau ci-contre.

Voici comment réaliser une régression linéaire à la main.

X	Y
1	12.45
2	9.14
3	15.80
4	20.96
5	24.57
6	18.95
7	24.07
8	23.28
9	30.31
10	26.92
11	35.34
12	34.86
13	35.89
14	42.34
15	35.95
16	39.10
17	41.97
18	40.26
19	42.26
20	50.09

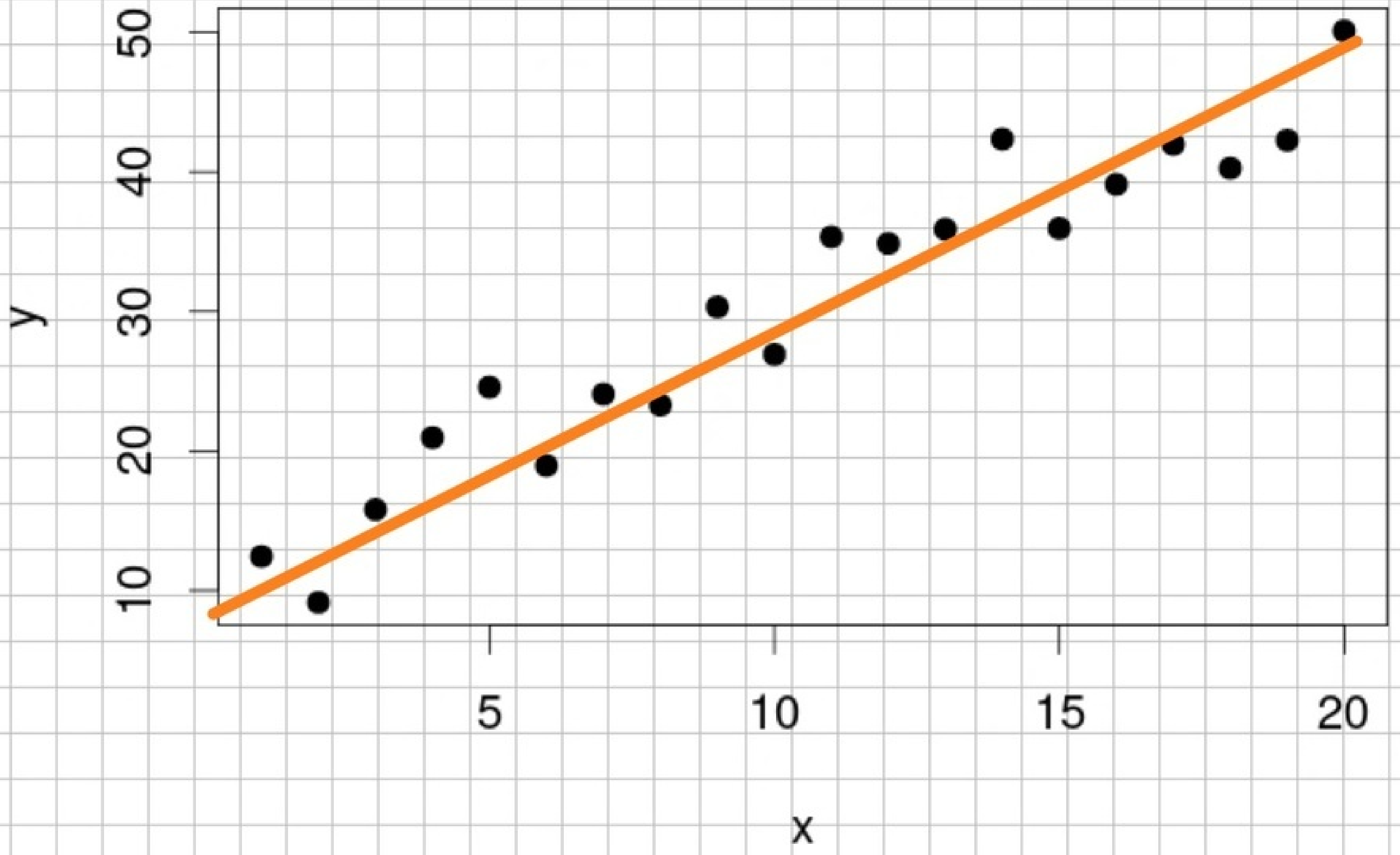
1) la première étape consiste à representer graphiquement une caractéristique X en fonction d'une caractéristique Y

On réalise cela à l'aide d'un <u>scatterplot</u>



2) On ajuste ensuite une droite à la main.
Le but du jeux est de trouver la droite qui passe <u>au plus près</u> de tous les points.

Par exemple celle-ci :



3) On utilise ensuite les outils vu auparavant pour déterminer l'équation de la droite :

$$y = aX + b$$

$b = 10$

$$\boxed{y = 2X + 10}$$

Il s'agit là de notre modèle : l'équation de la droite de régression obtenue par régression linéaire sur nos observations.

Ce modèle $y = 2x + 10$ permet de :

Résumer l'information

À lui tout seul, ce modèle permet de résumer toutes les données. Plus besoin de 20 paires de points en effet, on sait qu'elles sont toutes situées autour de cette droite.

Prédire les valeurs

Grâce à ce modèle, on peut également prédire la valeur de y pour des x que l'on a pas du tout mesuré. $x = 40$ par exemple, n'apparaît même pas sur le graphique. À l'aide de ce modèle pourtant on peut calculer que la valeur y correspondante vaut $y = 2 \cdot 40 + 10 = 90$

Expliquer les variations de y

Ce modèle nous permet également d'expliquer les valeurs de y. Si y augmente par exple c'est par ce que x augmente. On peut même dire que y augmente deux fois plus que x car leur coefficient de proportionnalité vaut 2.